2 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ МНОГОКРАТНЫХ

ИЗМЕРЕНИЙ

2.1 Порядок обработки результатов многократных измерений

Обработка результатов многократных измерений, согласно ГОСТ 8.207-76 «ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Основные положения», состоит в определении результата измерения физической величины и доверительного интервала, в пределах которого находится ее истинное значение.

Исходной информацией для обработки является ряд из n (n>4) результатов единичных измерений х1, х2, ..., хn, из которых исключены известные систематические погрешности. Число измерений зависит от требований к точности полученного результата и от реальной возможности выполнения повторных измерений.

Последовательность обработки результатов многократных измерений включает следующие этапы:

2.1.1 Исключение из результатов измерений известных систематических погрешностей

Число, обозначающее класс точности, показывает максимальную абсолютную погрешность прибора, выраженную в процентах от наибольшего значения измеряемой величины на верхнем пределе шкалы.

При известном классе точности прибора определяем максимальную абсолютную погрешность прибора по формуле:

 (2.1)

где: – *Кси*класс точности прибора;

*N* – наибольшее значение измеряемой величины на верхнем пределе шкалы (нормирующий параметр).

2.1.2 Вычисление среднего арифметического значения измеряемой величины

Вычисление среднего арифметического значения измеряемой величины из n единичных результатов по формуле:

, (2.2)

где: – *xi*  измеренное значение величины;

n – число измерений.

2.1.3 Вычисление среднего квадратичного отклонения результатов единичных измерений

Вычисление среднего квадратичного отклонения результатов единичных измерений , характеризующего рассеяние около их среднего значения по формуле:

 (2.3)

2.1.4 Исключение промахов (грубых погрешностей измерений)

Существует несколько критериев для оценки промахов:

а) при числе измерений n ≥ 20 и нормальном распределении результатов измерений используют критерий «трех сигм». По этому критерию считают, что результат хі, возникающий с вероятностью Р ≤ 0,003 (0,3 %), маловероятен и его логично считать промахом при

> 3σ, (2.4)

б) при числе измерений n < 20 целесообразно использовать критерий Романовского. При этом вычисляют соотношение:

 (2.5)

где: – *xi*  результат, что вызывает сомнение;

β – коэффициент, предельное значение которого  определяют по таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Значения 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень значимости q | Число измерений | | | | | | |
| *n* = 4 | *n* = 6 | *n* = 8 | *n* = 10 | *n* = 12 | *n* = 14 | *n* = 16 |
| 0,01 | 1,73 | 2,16 | 2,43 | 2,62 | 2,75 | 2,90 | 3,08 |
| 0,02 | 1,72 | 2,13 | 2,37 | 2,54 | 2,66 | 2,80 | 2,96 |
| 0,05 | 1,71 | 2,10 | 2,27 | 2,41 | 2,52 | 2,69 | 2,78 |
| 0,10 | 1,69 | 2,00 | 2,17 | 2,29 | 2,39 | 2,49 | 2,62 |

При  результат измерения исключают («отбрасывают»), поскольку он является промахом.

в) при числе измерений  можно применять критерий Шовинэ. В этом случае считают, что результат *xi* является промахом, если  превышает значения, приведенные ниже:

 >  (2.6)

2.1.5 Вычисление средней квадратичной погрешности результата измерения среднего арифметического

Вычисление средней квадратичной погрешности результата измерения среднего арифметического  по формуле:

 , (2.7)

2.1.6 Вычисления доверительных границ случайной погрешности результата измерений *ε*

Из математической статистики известно, что если результат единичных измерений при небольшом числе измерений подчиняется нормальному закону, то распределение средних арифметических значений ряда измерений подчиняется закону Стьюдента с тем же арифметическим значением .

При заданном значении доверительной вероятности *P* и числе единичных измерений *n* по таблице 2.2 определяют коэффициент Стьюдента *t*.

Таблица 2.2 – Значение коэффициента Стьюдента t (ГОСТ 8.207-76)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *n* | | | | | | | | | |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 |
| 0,90 | 6,314 | 2,920 | 2,353 | 2,132 | 2,015 | 1,943 | 1,895 | 1,860 | 1,833 | 1,761 |
| 0,95 | 12,706 | 4,303 | 3,182 | 2,776 | 2,571 | 2,447 | 2,365 | 2,306 | 2,262 | 2,145 |
| 0,99 | 63,657 | 9,925 | 5,841 | 4,604 | 4,032 | 3,707 | 3,499 | 3,355 | 3,250 | 2,977 |

Доверительные границы случайной погрешности результата измерений определяют по следующей формуле:

 (2.8)

2.1.7 Вычисления доверительных границ неисключенной систематической погрешности результата измерений

Доверительные границы неисключенной систематической погрешности измерения, если можно выделить ее составляющие  , устанавливают по формуле:

 2.9)

где: *k* – коэффициент (табл. 2.3), определяемый принятой доверительной вероятностью *P* и числом *m* составляющих систематической неисключенной

погрешности; – границы j-й составляющей погрешности.

Таблица 2.3 – Значения коэффициента k (ГОСТ 8.207-76)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *m* | | | |
| 5 и более | 4 | 3 | 2 |
| 0,95 | 1,1 | | | |
| 0,99 | 1,45 | 1,40 | 1,30 | 1,20 |

Доверительную вероятность для вычисления границ неисключенной систематической погрешности принимают той же, что и при вычислении границ случайной погрешности результата измерения.

2.1.8 Вычисление доверительных границ погрешности результата измерений .

Согласно ГОСТ 8.207-76 суммирование неисключенной систематической и случайной погрешностей измерения осуществляют по следующим правилам:

1. Если соотношение < 0,8, то неучтенной систематической погрешностью по сравнению со случайной пренебрегают и принимают, что доверительные границы погрешности результата измерения 

2. Если соотношение > 0,8, то случайной погрешностью по сравнению с неучтенной систематической пренебрегают и принимают, что доверительные границы погрешности результата измерения 

3. Если  , то доверительные границы погрешности результата измерений вычисляют по формуле:

, (2.10)

где: K – коэффициент, зависящий от соотношения случайной и систематической погрешностей;

– суммарная средняя квадратичная погрешность результата измерений:

 (2.11)

 (2.12)

Если составляющие неисключенной систематической погрешности не установлены, а величина доверительных границ случайной погрешности результата измерений ε соизмерима с абсолютным значением погрешности средства измерений  , то величину  считают неисключенной систематической погрешностью и в качестве доверительных границ погрешности результата измерений принимают величину

 (2.13)

2.1.9 Представление результата измерения в виде

 (2.14)

где: P – доверительная вероятность.

Если одна из погрешностей меньше другой в три или более раз, то в меньшей пренебрегают и в качестве погрешности результата измерений принимают только наибольшее.

2 Примеры обработки результатов прямых многократных измерений

2.2.1 Пример 1

При многократном измерении диаметра вала микрометром получены следующие результаты, мм: 29,94; 29,95; 29,96; 29,97; 29,97; 29,98; 29,98. Неучтенная систематическая погрешность, вызванная отклонением температуры вала от нормальной, θ = ± 2 мкм.

Определить промахи, найти и записать в стандартной форме результат измерений при доверительное вероятности P = 0,95.

Решение

1. Определим среднее арифметическое значение измеряемой величины по формуле 2.2, мм:



2. Рассчитаем среднее квадратичное отклонение результатов единичных измерений  по формуле 2.3, мм:



3. Поскольку число измерений < 10, вычисляем промахи с использованием критерия Романовского по формуле 2.5:

Проверим на наличие промахов крайние члены ряда  и 

Для =29,98 мм,  .

Для ближайшего меньшего n=6 и q=0,05 (при Р=0,95) по таблице 2.1 найдем , то есть <  (1,07 < 2,10), поэтому результат мм не является промахом.

Для  =29,94 мм .

 <  (1,6 < 2,10), поэтому результат мм не является промахом.

4. Вычислим среднюю квадратичную погрешность результата измерения среднего арифметического  по формуле 2.7, мм:



5. Для заданной вероятности  и числа измерений  по таблице 2.2 устанавливаем значение коэффициента Стьюдента .

Тогда доверительные границы случайной погрешности результата измерений, мм:



6. Поскольку соотношение < 0,8, то неучтенной систематической погрешностью по сравнению со случайной погрешностью измерения пренебрежем и примем доверительные границы погрешности результата измерений, мм:



7. Результат измерений представим в стандартной форме:



2.2.2 Пример 2

При измерении температуры термометром класса точности 0,5 с диапазоном измерения (0...100) °С получили следующие значения t, °С: 25,1; 25,2; 25,2; 25,1; 25,0; 25,1; 25,2; 25,2. Оценить погрешность измерения с вероятностью α = 0,90.

Решение

1. При известном классе точности термометра и наибольшем значении температуры N = 100°C по формуле 2.1 определяем максимальную абсолютную погрешность прибора, °С:



2. Определим среднее арифметическое значение измеряемой величины по формуле 2.2, °C:



3. Рассчитаем среднее квадратическое отклонение результатов единичных измерений  по формуле 2.3, °C:



4. Поскольку число измерений < 20, вычисляем промахи с использованием критерия Романовского по формуле 2.5 проверим на наличие промахов крайние члены ряда  и  .

Для =25,2°C 

Для заданного числа измерений *n*=8 и *q*=0,10 (при Р=0,90) по таблице 2.1 найдем , то есть < (1,25<2,10), поэтому результат =25,2°C не является промахом.

Для =25,0°C 

< (1,25<2,10), поэтому результат =25,0°C не является промахом.

5. Вычислим среднюю квадратичную погрешность результата измерения среднего арифметического  по формуле 2.7, °C:



6. Для заданной вероятности  и числе измерений  по таблице 2.2 устанавливаем значение коэффициента Стьюдента  Тогда доверительные границы случайной погрешности результата измерений, °С:



7. Определим доверительные границы погрешности результата измерений по

формуле 2.13, °С: 

8. Результат измерений представим в стандартной форме:



3 РАСЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ АБСОЛЮТНОЙ, ОТНОСИТЕЛЬНОЙ И ПРИВЕДЕННОЙ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОТ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЙ

3.1 Определение абсолютной, относительной и приведенной погрешностей

измерений

По способу выражения погрешности подразделяют на абсолютные, относительные и приведенные.

При известном классе точности прибора абсолютную погрешность определяют по формуле:

 (3.1)

где –*Кси* класс точности средства измерения;

*XN* – наибольшее значение измеряемой величины на верхнем пределе шкалы (нормирующее значение).

Относительная погрешность выражается отношением абсолютной погрешности измерения к действительному или истинного значения измеряемой величины (или результата измерения):

 (3.2)

Приведенной называется относительная погрешность ух, выраженная в процентах от некоторого нормирующего значения хN:

 (3.3)

Часто за нормирующее значение принимают верхний предел средств измерений, то есть  или размах шкалы прибора, т. е. .

3.2 Пример расчета зависимости абсолютной, относительной и приведенной погрешностей от результата измерений

Вольтметром со шкалой (0...100) В, который характеризуется абсолютной погрешностью ΔU=1 В, определены значения напряжения, В: 0, 10, 20, 40, 50, 60, 80, 100. Рассчитать зависимости абсолютной, относительной и приведенной погрешностей от результата измерений. Результаты представить в виде таблиц и графиков.

Решение

Для записи результатов составляем таблицу (табл. 3.1), в столбцы которой будем записывать значения U, абсолютные ΔU, относительные δU и приведены γU погрешности.

В первый столбец записываем заданные в условии задачи измеренные значения напряжения, В: 0, 10, 20, 40, 50, 60, 80, 100.

Значение абсолютной погрешности известно из условий задачи (ΔU=1 В) и считается одинаковым для всех измеренных значений напряжения; это значение заносим во все ячейки второго столбца.

Значение относительной погрешности будем рассчитывать по формуле (3.2)



При U1 = 0 В получаем



При U2 = 10 В получаем



Значения относительной погрешности для остальных измеренных значений напряжения рассчитываются аналогично. Полученные таким образом значения относительной погрешности заносим в третий столбец.

Для расчета значений приведенной погрешности используем формулу 3.3:



Так как диапазон измерений вольтметра – (0...100) В, то за нормирующее значение принимаем размах шкалы прибора, т. е.



Поскольку величины ΔU и XN постоянные при любых значениях напряжения, то величина приведенной погрешности также постоянная и составляет



Таблица 3.1 – Результаты расчета значений погрешностей

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *U, В* | Δ*U, В* | δ*U, %* | γ*U, %* |
| 0 | 1 | ∞ | 1 |
| 10 | 1 | 10,00 | 1 |
| 20 | 1 | 5,00 | 1 |
| 40 | 1 | 2,50 | 1 |
| 50 | 1 | 2,00 | 1 |
| 60 | 1 | 1,67 | 1 |
| 80 | 1 | 1,25 | 1 |
| 100 | 1 | 1,00 | 1 |

По данным таблицы 3.1 строим графики зависимостей абсолютной ∆ U, относительной δU и приведенной γU погрешностей от результата измерений U

3.1 – Графики зависимостей абсолютной, относительной и приведенной погрешностей от результата измерений.

Таблица 4.2 – Исходные данные к заданию 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Исходные данные | Вариант задания | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | | 4 | | 5 | | | 6 | | | 7 | | 8 | |
| Измерительное средство | Микрометр гладкий | Индикаторный нутромер | Вольтметр | | Амперметр | | Мікрометр гладкий | | | Термометр | | | Рычажный микрометр | | Микрометр гладкий | |
| *Δси*, мкм | ±5 | ±5 | – | | – | | ±5 | | | – | | | ±2 | | ±5 | |
| *Кси* | – | – | 1,0 | | 0,5 | | – | | | 0,5 | | | – | | – | |
| *N* | – | – | 250 В | | 20 А | | – | | | 50°С | | | – | | – | |
| α, % | 95 | 95 | 90 | | 90 | | 95 | | | 90 | | | 95 | | 95 | |
| Исходные данные | Вариант задания | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 10 | 11 | 12 | | 13 | | 14 | | | | 15 | | 16 | | |
| Измерительное средство | Микрометр гладкий | Индикаторный нутромер | Амперметр | Микрометр гладкий | | Амперметр | | Вольтметр | | | | Амперметр | | | Термометр | |
| *Δси*, мкм | ±2 | ±5 | – | ±5 | | – | | – | | | | – | | | – | |
| *Кси* | – | – | 2,0 | – | | 2,5 | | 1,5 | | | | 2,0 | | | 1,0 | |
| *N* | – | – | 200А | – | | 20А А | | 250 мВ | | | | 200мА | | | 50оС | |
| α, % | 95 | 90 | 90 | 95 | | 95 | | 90 | | | | 90 | | | 95 | |
| Исходные данные | Вариант задания | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 18 | 19 | | 20 | | 21 | | 22 | | 23 | | | 24 | | 25 |
| Измерительное средство | Микрометр гладкий | Омметр | Микрометр гладкий | | Микрометр гладкий | | Мікрометр гладкий | | Индикаторный нутромер | | Рычажный микрометр | | | Микрометр гладкий | | Микрометр гладки |
| *Δси*, мкм | ±5 | – | ±5 | | ±2 | | ±2 | | ±5 | | ±0,1 | | | ±5 | | ±2 |
| *Кси* | – | 2,5 | – | | – | | – | | – | | – | | | – | | – |
| *N* | – | 30 Ом | – | | – | | – | | – | | – | | | – | | – |
| α, % | 90 | 95 | 95 | | 95 | | 95 | | 90 | | 90 | | | 95 | | 95 |

Таблица 4.3 – Результаты измерений (к заданию 1)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант задания | | | | | | | | | | | | | |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| Измеряемая величина | | | | | | | | | | | | | |
| Результаты измерений, *xi* | *h*, мм | *d,* мм | *U*, В | *I*, A | *d*, мм | *t*, °С | *d*, мм | *d*, мм | *l*, мм | *d* мм | *I*, A | *d*, мм | *I*, A |
| 1,64 | 124,74 | 205 | 14,1 | 12,24 | 25,1 | 8,305 | 24,38 | 9,911 | 18,53 | 150 | 54,25 | 10,07 |
| 1,58 | 124,78 | 213 | 14,4 | 12,26 | 25,2 | 8,308 | 24,36 | 9,913 | 18,54 | 150 | 54,23 | 10,08 |
| 1,70 | 124,73 | 190 | 15,7 | 12,28 | 25,2 | 8,312 | 24,33 | 9,915 | 18,55 | 155 | 54,22 | 10,10 |
| 1,65 | 124,76 | 185 | 14,7 | 12,28 | 25,1 | 8,309 | 24,35 | 9,917 | 18,55 | 155 | 54,27 | 10,12 |
| 1,59 | 124,75 | 187 | 15,1 | 12,31 | 25,3 | 8,304 | 24,37 | 9,919 | 18,58 | 155 | 54,28 | 10,13 |
| 1,67 | 124,80 | 208 | 16,5 | 12,34 | 25,1 | 8,306 | 24,38 | 9,921 | 18,57 | 145 | 54,25 | 10,15 |
| 1,60 | 124,76 | 195 | 14,2 | 12,40 | 25,0 | 8,309 | 24,39 | 9,923 | 18,55 | 130 | 54,21 | 10,16 |
| 1,58 | 124,78 | 190 | 15,0 | 12,41 | 25,1 | 8,310 | 24,38 | 9,925 | 18,50 | 150 | 54,29 | 10,17 |
| 1,69 | 124,75 | 188 | 16,3 | 12,42 | 25,2 | 8,303 | 24,37 | 9,913 | 18,51 | 165 | 54,28 | 10,20 |
| 1,60 | 124,70 | 212 | 16,1 | 12,42 | 25,2 | – | 24,39 | 9,915 | 18,52 | 135 | 54,22 | 10,40 |
| 1,57 | 124,71 | 208 | ­­– | 12,45 | 25,1 | – | 24,30 | 9,917 | 18,59 | 160 | 54,21 | 10,07 |
| 1,64 | 124,73 | 198 | – | 12,80 | 25,0 | – | – | 9,919 | 18,52 | 155 | 54,29 | 10,08 |
| 1,60 | 124,75 | – | – | – | – | – | – | 9,921 | 18,51 | – | – | 10,10 |
| 1,61 | – | ­– | – | – | – | – | – | 9,923 | 18,57 | – | – | – |
| 1,60 | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – | – |

Продолжение таблицы 4.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант задания | | | | | | | | | | | | |
|  | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| Измеряемая величина | | | | | | | | | | | | |
| Результаты измерений, *xi* | *U*, мВ | *I*, мA | *t*, °C | *d*, мм | *R*, Ом | *d,* мм | *l,* мм | *h*, мм | *d*, мм | *l*, мм | *d*, мм | *b*, мм |
| 168,1 | 150 | 25,1 | 25,06 | 21,5 | 32,03 | 50,10 | 1,17 | 24,91 | 80,1 | 150,24 | 8,976 |
| 170,1 | 150 | 25,2 | 24,98 | 21,5 | 32,05 | 50,12 | 1,16 | 24,90 | 80,2 | 150,22 | 8,978 |
| 169,3 | 155 | 25,2 | 24,99 | 21,5 | 32,06 | 50,15 | 1,18 | 24,92 | 80,2 | 150,28 | 8,970 |
| 167,8 | 155 | 25,1 | 24,04 | 21,0 | 32,02 | 50,10 | 1,15 | 24,92 | 80,4 | 150,29 | 8,970 |
| 168,6 | 155 | 25,0 | 25,0 | 18,5 | 32,04 | 50,14 | 1,16 | 24,92 | 80,3 | 150,12 | 8,988 |
| 167,4 | 140 | 25,1 | 25,03 | 20,0 | 32,06 | 50,10 | 1,17 | 24,93 | 80,7 | 150,18 | 8,988 |
| 170,5 | 130 | 25,2 | 25,02 | 19,0 | 32,02 | 50,20 | 1,16 | 24,95 | 80,5 | 150,20 | 8,974 |
| 168,5 | 145 | 25,2 | 24,97 | 21,0 | 32,01 | 50,15 | 1,15 | 24,93 | 80,5 | 150,22 | 8,970 |
| 169,7 | 105 | 25,3 | 24,98 | 19,5 | 32,04 | 50,14 | 1,17 | 24,91 | 80,4 | 150,25 | 8,978 |
| 169,0 | 135 | 25,0 | 25,01 | 19,0 | 32,05 | 50,15 | 1,16 | 24,98 | 80,4 | 150,25 | 8,980 |
| 168,5 | 140 | 25,1 | 25,02 | 20,0 | 32,06 | 50,20 | 1,15 | 24,93 | 80,3 | 149,95 | 8,988 |
| 168,2 | 150 | – | 25,1 | 21,0 | – | 50,18 | 1,11 | 24,95 | 81,0 | – | 8,970 |
| 169,0 | – | – | 25,0 | – | – | 50,20 | 1,18 | 25,0 | – | – | 8,978 |
| 168,7 | – | – | – | – | – | – | 1,17 | – | – | – | – |
| 1680 | – | – | – | – | – | – | 1,3 | – | – | – | – |

Таблиця 4.4 – Исходные данные к завданию 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вариант | Диапазон измерений | Класс точности | Результаты измерений |
| 1 | (0…10) В | 0,1 | 0; 1; 2; 4; 5; 6; 8; 10 В |
| 2 | (0…10) В | 0,25 |
| 3 | (0…10) В | 0,4 |
| 4 | (0…10) В | 0,5 |
| 5 | (0…5) А | 0,1 | 0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0 А |
| 6 | (0…5) А | 0,15 |
| 7 | (0…5) А | 0,25 |
| 8 | (0…5) А | 0,5 |
| 9 | (0…5) А | 0,4 |
| 10 | (0…100) °С | 0,1 | 0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 °С |
| 11 | (0…100) °С | 0,15 |
| 12 | (0…100) °С | 0,25 |
| 13 | (0…100) °С | 0,4 |
| 14 | (0…1000) Ом | 0,5 | 0; 100; 200; 400; 500; 600; 800; 1000 Ом |
| 15 | (0…1000) Ом | 1,0 |
| 16 | (0…1000) Ом | 1,5 |
| 17 | (0…1000) Ом | 2,5 |
| 18 | (0…100) МВ | 0,6 | 0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 МВ |
| 19 | (0…100) МВ | 1,0 |
| 20 | (0…100) МВ | 1,5 |
| 21 | (0…100) МВ | 2,5 |
| 22 | (0…100) мА | 0,6 | 0; 10; 20; 40; 50; 60; 80; 100 мА |
| 23 | (0…100) мА | 1,0 |
| 24 | (0…100) мА | 1,5 |
| 25 | (0…100) мА | 4,0 |